ROLUL PROBLEMELOR GENERALE ÎN ORGANIZAREA ÎNVĂŢĂRII AUTOREGLATE

THE ROLE OF GENERAL PROBLEMS IN THE ORGANIZATION OF SELF-REGULATED LEARNING

Mitrofan CIOBAN,
academician,
Universitatea de Stat din Tiraspol,
Antonina CIOBAN-PILEȚCAIA,
Universitatea Nistreană,
Larisa SALI,
Universitatea de Stat din Tiraspol

***Abstract**: In the present article, we examine some aspects regarding the role of mathematical problems of general character in the organization process of sudents' individual activity, and outlining an individual track of self-regulated learning. General problems regarding analytic geometry, complex coordinates of sets of points, and second-order curves are examined.*

***Keywords**: teaching-learning-evaluation, students' individual activity, self-regulated learning, general problems, analytic geometry, complex coordinates, second-order curves.*

La pensée n'est qu'un éclair,
Au milieu d'une longue nuit,
Mais c'est cet éclair qui est tout.
Henri Poincaré

Introducere

Necesitatea perfecţionării profesionale a cadrelor didactice este implicată de o multitudine de factori care decurg din tendinţele actuale spre modernizarea continuă a curriculumului, implementarea tehnologiilor, a metodelor şi a formelor noi de predare-învăţare-evaluare, deplasarea focalizării pe subiectul învăţării etc. [14].

Cercetătorii propun diverse strategii de sporire a calităţii formării profesionale a profesorilor de matematică: profesionalizarea pregătirii matematice (Brânzei D., Mordkovici A., Şadrikov V., Afanasiev V., Smirnov E. [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 19]); formarea contextual-metodică a profesorilor de matematică (Marcenko M.); pregătirea istorico-metodică a profesorilor de matematică în universităţile pedagogice (Drobîşev Iu., Poleakova T., Beloborodova S. [16, 17, 21]); aplicarea unui sistem bazat pe îmbogăţirea conţinuturilor de matematică elementară şi didactica matematicii în procesul de recapitulare (Şebanova L. [17, 21]); formarea priceperilor de construire a sistemelor de probleme (Ţiţeică Gh., Kovaleva G., Koleaghin Iu., Polya G., Fridman L. ş.a. [3, 4, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 22]). În opinia lui A. Papîşev, îmbunătăţirea calitativă a procesului educaţional la matematică se realizează prin trei activități: informare, gestionare şi coordonare [20]. Punerea în aplicare a primului dintre aceste aspecte ţine de asigurarea continuităţii factorilor situaţionali şi semantici de conţinut, al doilea – de gestionarea adecvată a procesului de formare a structurilor cognitive, iar al treilea – în orientarea elevilor spre aplicarea în experienţa individuală a unor acţiuni de învăţare generalizate, contribuind la selectarea liberă a unor trasee proprii de explorare a cunoştinţelor. Nu există o părere unică referitoare la metodologia formării competenţelor de rezolvare a problemelor matematice. Unii autori pun pe prim-plan diversificarea metodelor de rezolvare a unei probleme, alţii – rezolvarea diferitelor probleme prin aceeaşi metodă. Deci diferiţi autori expun diverse concepţii, uneori se întâlnesc opinii opuse.

Autorii prezentului articol susțin următoarea părere:

- Omul nu este capabil să rezolve toate problemele matematice existente, prin urmare trebuie să asimileze un număr suficient de metode de rezolvare pentru a le aplica la diverse probleme.
- Pentru majoritatea elevilor şi studenţilor cu capacităţi medii este necesar să rezolve mai multe probleme pentru a însuşi o metodă.
- Profesorul trebuie să dispună de un număr suficient de probleme cu acelaşi grad de dificultate pentru a oferi condiţii identice tuturor elevilor (studenţilor) în procesul de evaluare.
- Problemele propuse pentru lucrul individual trebuie să acopere conţinuturile teoretice predate, pentru ca elevul (studentul) să aplice ideile de bază, astfel consolidând materialul teoretic.

Un procedeu eficient de formare a competenţelor de rezolvare a problemelor matematice constă în utilizarea problemelor generale. Problemele generale, în mod natural, pot fi compuse în conformitate cu principiile anterioare. Fenomenele matematice, ca şi cele naturale, pot fi divizate în clase. Din această cauză problemele matematice pot fi repartizate după anumite tipuri şi fiecare tip se referă la un anumit fenomen şi conţine anumiţi parametri numerici: două probleme concrete de acelaşi tip se deosebesc prin valorile acestor parametri. Scopul problemei generale constă în stabilirea anumitor relaţii ale fenomenului dat cu alte fenomene matematice. Orice capitol matematic trebuie să elucideze relaţiile unui fenomen nou cu alte fenomene. Multe din aceste relaţii pot deveni părţi componente ale problemei generale.

În continuare, propunem pentru analiză câteva exemple concrete.

1. Probleme generale în geometria analitică

Prezentăm unele probleme cu caracter general din geometria analitică. Aceste probleme sunt exemple din sarcinile pentru lucrul individual al studenţilor. Considerăm că în plan şi în spaţiu sunt fixate sisteme de coordonate carteziene rectangulare.

Problema 1.1. Transformarea de asemănare de genul întâi ψ aplică punctele $A = (1,1)$, $B = (4,5)$ respectiv pe punctele $A' = (-30,-1)$, $B' = (30,10)$.

1.1.1. Scrieţi expresiile analitice ale transformării ψ.

1.1.2. Determinaţi coeficientul de asemănare k al transformării ψ.

1.1.3. Calculaţi punctul fix C al transformării ψ.

1.1.4. Determinaţi deplasările f şi g pentru care $\psi = H_O^k \circ f = g \circ H_O^k$.

1.1.5. Determinaţi coordonatele punctelor F şi D, pentru care $D = \psi(O)$ \c si $O = \psi(F)$.

1.1.6. Fie l dreapta cu ecuaţia $x - y + 4 = 0$. Determinaţi ecuaţiile dreptelor

h şi p pentru care $h = \psi(l)$ şi $l = \psi(p)$.

Problema 1.2. Sunt date patru puncte $A = (3,2)$, $B = (4,3)$, $C = (5,-3)$, $A' = (15,2)$.

1.2.1. Calculaţi aria S_{ABC} a triunghiului ABC. Determinaţi orientarea triunghiului ABC.

1.2.2. Determinaţi un punct E pentru care raportul simplu $(AB,E) = -2/3$.

1.2.3. Calculaţi produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$.

1.2.4. Determinaţi ecuaţia dreptei (AB) şi distanţa de la punctul C până la această dreaptă.

1.2.5. Determinaţi ecuaţia dreptei l ce trece prin punctul A' perpendicular la dreapta (AC).

1.2.6. Determinaţi ecuaţia medianei m_b duse din vârful B al triunghiului ABC.

1.2.7. Determinaţi ecuaţia bisectoarei l_c duse din vârful C al triunghiului ABC.

1.2.8. Determinaţi punctul H de intersecţie al înălţimilor triunghiului ABC.

1.2.9. Determinaţi centrul, raza şi ecuaţia cercului ce trece prin punctele A, B, C.

1.2.10. Aflaţi două puncte P, Q situate de părţi diferite şi la distanţe egale de la dreapta l.

1.2.11. Vectorul $\vec{m}$ este paralel cu dreapta (AA') şi are abscisa egală cu 6. Calculaţi coordonatele şi modulul vectorului $\vec{m}$.

1.2.12. Calculaţi coordonatele punctului D, dacă $ABCD$ este un paralelogram.

1.2.13. Calculaţi coordonatele punctului V, dacă A' este punctul de intersecţie ale înălţimilor triunghiului ABV.

Problema 1.3. Sunt date ecuaţiile a două drepte:

$$h_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases} \quad h_2 : \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

1.3.1. Determinaţi locul geometric de puncte egal îndepărtate de la dreptele h_1, h_2.

1.3.2. Calculaţi unghiul dintre aceste drepte.

1.3.3. Determinaţi poziţia lor reciprocă.

1.3.4. Determinaţi ecuaţia dreptei h ce intersectează dreptele h_1 şi h_2 şi este perpendiculară pe ele. Determinaţi punctele de intersecţie ale dreptei h cu dreptele h_1 şi h_2.

Problema 1.4. În paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ sunt cunoscute coordonatele vârfurilor $A=(1,2,3)$, $B=(9,6,4)$, $D=(3,0,4)$ şi $A'=(5,2,6)$.

1.4.1. Determinaţi volumul V al paralelipipedului.

1.4.2. Calculaţi aria bazei A_{ABCD}.

1.4.3. Calculaţi coordonatele vârfurilor C, B', C', D'.

1.4.4. Calculaţi ecuaţia dreptei (CD').

1.4.5. Calculaţi ecuaţia planului (ABC).

1.4.6. Calculaţi unghiul dintre dreapta (CD') şi planul (ABC).

1.4.7. Calculaţi unghiul dintre planele (ABC) şi (ABA').

1.4.8. Determinaţi punctul E ce împarte segmentul $[AB]$ în raportul 2/3.

Problema 1.5. În piramida $SABCD$ sunt cunoscute coordonatele vârfurilor $S = (1, 2, 3)$, $A = (9, 6, 4)$, $B = (3, 0, 4)$ şi $D = (5, 2, 6)$.

1.5.1. Determinaţi coordonatele punctului C, dacă ABCD este un trapez cu baza mare DC de două ori mai mare de cea mică AB.

1.5.2. Determinaţi volumul V al piramidei.

1.5.3. Calculaţi aria bazei A_{ABCD} şi mărimea înălţimii.

1.5.4. Calculaţi coordonatele produsului vectorial $[\vec{AB}, \vec{AC}]$.

1.5.5. Calculaţi ecuaţia dreptei *h* ce trece prin punctul *S* perpendicular la planul bazei (*ABCD*) şi coordonatele punctului de intersecţie *H* a dreptei *h* cu planul bazei.

Problema 1.6. Este dată o curbă de ordinul doi γ cu un focar *F* = (3,2), directoarea respectivă *l: x+y+5=0* şi excentricitatea *e*=2.

1.6.1. Determinaţi tipul, ecuaţia generală şi ecuaţia canonică a acestei curbe.

1.6.2. Calculaţi un punct situat pe curbă, un punct situat în interiorul curbei şi un punct situat în exteriorul curbei.

1.6.3. Determinaţi o axă de simetrie.

1.6.4. Determinaţi centrul curbei date.

2. Coordonatele complexe ale unor mulţimi de puncte

Numerele complexe oferă posibilitatea de a dezvălui esenţa metodelor algebrice în geometrie. Aplicaţiile numerelor complexe sunt diverse: teoria funcţiilor de variabilă complexă, funcţii analitice, teoria numerelor, mecanică, aero- şi hidrodinamică. În geometria plană numerele complexe pot fi utilizate la rezolvarea unor probleme, cunoscând unele formule generale. Selectarea formulelor se face reieşind din relaţiile date în ipoteza problemei şi concluzii. Simplitatea metodei numerelor complexe este evidentă în comparaţie cu alte metode, care necesită gândire creativă şi o lungă cale de explorare.

Interpretarea geometrică a numerelor complexe este accesibilă elevilor claselor gimnaziale.

Unui număr complex dat în formă algebrică $z = x + yi$ i se asociază un punct $M(x; y)$ în planul de coordonate. Numărul complex z este numit coordonată complexă a punctului $M(x; y)$ sau *afixul punctului* $M(x; y)$ şi se mai notează $M(z)$. Astfel, între mulţimea punctelor planului euclidian şi mulţimea numerelor complexe se stabileşte o relaţie biunivocă. Acest plan se numeşte planul numerelor complexe. Axa Ox se numeşte axă reală, iar Oy – axă imaginară. Numărul zero este şi număr real, şi imaginar.

Formulele cele mai simple utile la acest capitol sunt:

2.1. Distanţa dintre originea de coordonate şi punctul $M(z)$: $|OM| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2.2. Distanţa dintre punctele $A(a)$ şi $B(b)$: $|AB| = |a - b|$;

2.3. Măsura unghiului orientat dintre vectorul $\overrightarrow{OM}$ şi sensul pozitiv al axei Ox: $\varphi = \arg z$;

2.4. Punctele $A(a)$ şi $B(b)$ simetrice în raport cu axa Ox: $a = \bar{b}$;

2.5. Punctele $A(a)$ şi $B(b)$ simetrice în raport cu axa Oy: $a = -\bar{b}$;

2.6. Punctele $A(a)$ şi $B(b)$ simetrice în raport cu originea O: $a = -b$;

2.7. Mulţimea punctelor cercului de rază r cu centrul în originea de coordonate: $|z| = r$ sau $z\bar{z} = r^2$;

2.8. Punctul $C(c)$ împarte segmentul AB (unde $A(a)$ şi $B(b)$) în raportul λ: $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$;

2.9. Condiţii suficiente de coliniaritate a trei puncte $A(a)$, $B(b)$ şi $C(c)$: $\exists \alpha, \beta \in R$, unde $\alpha + \beta = 1$ pentru care $c = \alpha a + \beta b$;

2.10. Ecuaţia dreptei OA: $z\bar{a} = \bar{z}a$;

2.11. Perpendicularitatea segmentelor AB şi CD ($A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ şi $D(d)$:

$AB \perp CD \Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d})+(\bar{a}-\bar{b})(c-d)=0$;

2.12. Centroidul unui triunghi cu vârfurile $A(a)$, $B(b)$ şi $C(c)$:

$g=\frac{1}{3}(a+b+c)$;

2.13. Ortocentrul unui triunghi cu vârfurile $A(a)$, $B(b)$ şi $C(c)$:

$h=a+b+c$.

Aceste formule ne permit să rezolvăm o mulţime de probleme de geometrie plană, inclusiv:

Problema 1. Demonstraţi, că ecuaţia cercului (sau a dreptei) în planul complex poate fi scrisă în forma $az\bar{z}+bz-\overline{bz}+c=0$, unde a şi c sunt numere pur imaginare.

Problema 2. Demonstraţi că puterea punctului cu coordonata w, în raport cu cercul $az\bar{z}+bz-\overline{bz}+c=0$, este egală cu $w\bar{w}+\frac{b}{a}w-\frac{\bar{b}}{a}\bar{w}+\frac{c}{a}$.

Problema 3. Demonstraţi că trei puncte cu coordonatele z_0, z_1, z_2 sunt coliniare, atunci şi numai atunci când $\frac{z_0-z_1}{z_1-z_2}=\frac{\bar{z}_0-\bar{z}_1}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}$.

Problema 4. Demonstraţi că dreapta care trece prin punctele cu coordonatele z_1, z_2 este locul geometric al punctelor cu coordonata z, pentru care are loc relaţia $\frac{z-z_1}{z_1-z_2}=\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}$.

Problema 5. Demonstraţi că, dacă suma pătratelor laturilor unui patrulater este egală cu suma pătratelor diagonalelor lui, atunci acest patrulater este un paralelogram.

Teorema lui Ptolomeu: Suma produselor lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater înscris în cerc este egală cu produsul lungimilor diagonalelor sale.

Demonstraţie. Fie patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc de rază R cu centrul O. Alegem un sistem de coordonate cu originea în centrul O, iar raza $\overrightarrow{OA}$ – semiaxa pozitivă a axei absciselor. Vârfurile B, C şi D vor fi considerate imagini ale numerelor complexe x, y, z modulul cărora este egal cu R, iar argumenţii principali sunt respectiv α, β, γ. Punctul $A(R)$ are argumentul principal nul. Vom demonstra, că $|AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|=|AC|\cdot|BD|$, sau:

$|x-R|\cdot|y-z|+|z-R|\cdot|y-x|=|y-R|\cdot|z-x|$ $\cdot$(*)

Calculăm separat modulul diferenţelor: $|x-R|=|R(\cos\alpha+i\sin\alpha)-R|=R|\cos\alpha-1+i\sin\alpha|=R\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin\alpha}=2R\sin\frac{\alpha}{2}$

$|y-R|=2R\sin\frac{\beta}{2}$; $|z-R|=2R\sin\frac{\gamma}{2}$;

$|y-x|=\left|z\left(\frac{y}{z}-1\right)\right|=\left|z\left(\frac{\cos\beta+i\sin\beta}{\cos\alpha+i\sin\alpha}-1\right)\right|=$

$R|\cos(\beta-\gamma)+i\sin(\beta-\gamma)-1|=2R\sin\frac{\gamma-\beta}{2}$;

$|y-x|=2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$; $|z-x|=2R\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$.

Atunci egalitatea (*) va avea forma:

$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$.

Pentru a demonstra egalitatea utilizăm formula pentru sinusul diferenţei a două unghiuri. [15, p.99]

3. Curbe de ordinul doi

Problema 1. Poziţia reciprocă a dreptelor şi a curbelor de ordinul doi.

Fie dată ecuaţia curbei de ordinul doi

C: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ (1)

şi ecuaţiile parametrice ale dreptei

$$\boldsymbol{d}: \begin{cases} x = at + m, \\ y = bt + n. \end{cases} \tag{2}$$

Pentru a afla punctele de intersecţie ale curbei cu dreapta se rezolvă sistemul compus din ecuaţiile respective. Prin înlocuirea valorilor variabilelor ***x*** şi ***y*** în ecuaţia (1) obţinem o ecuaţie de gradul doi în raport cu parametrul ***t***: $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. (3)

1. Dacă $P \neq 0$ avem o ecuaţie de gradul doi. Ea poate avea două soluţii reale distincte $x_1 \neq x_2$, atunci există două puncte de intersecţie – dreapta este secantă. Dacă ecuaţia (3) pentru $P \neq 0$ are o singură soluţie, adică $x_1 = x_2 \in R$, dreapta este tangentă la curbă. Dacă ecuaţia (3) pentru $P \neq 0$ nu are soluţii reale, există două soluţii complexe conjugate, a căror medie aritmetică este un număr real. Interpretarea geometrică presupune existenţa a două puncte comune imaginare, iar mijlocul segmentului cu aceste extremităţi este un punct real.
2. Dacă $P = 0$ şi $Q \neq 0$ obţinem ecuaţia de gradul I $2Qt + R = 0$. Pentru $R \neq 0$ ecuaţia $2Qt + R = 0$ are soluţia reală unică $t = -\frac{R}{2Q}$.
   În acest caz, dreapta şi curba au un singur punct de intersecţie – dreapta „străpunge" curba.
3. Dacă $P = 0$, $Q = 0$ şi $R \neq 0$ ecuaţia nu are soluţii reale sau complexe. În acest caz, dreapta este asimptotă la curbă.
4. Dacă $P = 0$, $Q = 0$ şi $R = 0$. În acest caz, curba degenerează în două drepte, iar una din ele este dreapta dată.

Este interesantă problema privind poziţia reciprocă a două curbe.

Problema 2. Poziţia reciprocă a două cercuri.

Rezolvarea formală se reduce la aflarea soluţiilor unui sistem de două ecuaţii de gradul doi:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + r_2^2 - r_1^2 + x_2^1 - x_1^2 + y_2^1 - y_1^2 = 0, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2. \end{cases} \tag{4}$$

Am redus problema la aflarea punctelor de intersecţie a cercului ω_2 cu o dreaptă ***l.***

Ce poziţie are dreapta ***l*** faţă de cerc? Aceasta este dreapta radicală a cercurilor ω_1 şi ω_2.

Cum poate fi definită axa radicală a două cercuri?

Fie A un punct care aparţine unei drepte care intersectează cercul.

Se ştie că $AB \cdot AC = const$, $p(A, \omega) = AO^2 - r^2$.

Dacă sunt date două cercuri ω_1, ω_2, atunci *axa radicală* este totalitatea punctelor cu puteri egale.

Axa radicală, dacă există, este perpendiculară pe linia centrelor. Deci este suficient să găseşti un punct pe ea. Dacă cercurile date se intersectează, atunci punctele comune aparţin axei radicale. Dacă cercurile date nu se intersectează, atunci construim un cerc ω_3 cu centrul $O_3 \notin (O_1O_2)$ care intersectează ambele cercuri ω_1, ω_2. Deci vom avea axa radicală l_1 a cercurilor ω_1, ω_3 şi axa radicală l_2 a cercurilor ω_2, ω_3. Punctul de intersecţie $M \in l_1 \cap l_2$ este *centrul radical* al cercurilor $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ şi aparţine axei radicale a cercurilor ω_1, ω_2.

Evident că de aceste tipuri pot fi compuse foarte multe probleme.

Acest fapt poate fi folosit la compunerea sarcinilor pentru activitatea individuală a studenţilor.

În legătură cu tendinţele integrării într-o Europă a cunoaşterii, T. Callo menţionează: „*Profesorul European trebuie să aibă o imagine integrală referitor la rolul său în educarea elevului, atât prin disciplina predată, cât şi printr-o formare generală globală în ritmul accelerat al secolului”* [2, p. 124].

Accentul pus pe cunoaşterea metodelor de rezolvare a problemelor generale nu constituie o axare pe „metodism” în exces, ci crearea infrastructurii necesare pentru demararea unui studiu de calitate a matematicii.

Referinţe bibliografice

1. Brânzei D., Aniţa S., *Bazele raţionamentului geometric*, Iaşi, Editura Academiei, 1983.
2. Callo T., *O pedagogie a integralităţii. Teorie şi practică*, Chişinău, USM, 2007.
3. Chiriac V., Chiriac M., *Probleme de algebră*. Bucureşti, Editura tehnică, 1977.
4. Cioban M., Cioban-Pileţcaia A., *Despre relaţii metrice între elementele unui triunghi*, Delta 1, 2007, p. 3-14.
5. Ciobanu M., Sali L., *Consideraţii asupra cvadraturii şi descompunerii poligoanelor.* În: Materialele Conferinţei Internaţionale „Învăţământul Universitar din Republica Moldova la 80 de ani”, volumul II „Probleme actuale ale Didacticii Matematicii, Informaticii şi Fizicii”, Chişinău, 2010.
6. Ciobanu M., Sali L., *Consideraţii asupra măsurării mărimilor geometrice*. În: Materialele Conferinţei Internaţionale „Învăţământul Universitar din Republica Moldova la 80 de ani”, volumul II „Probleme actuale ale Didacticii Matematicii, Informaticii şi Fizicii”, Chişinău, 2010.
7. Courant R., Robbins H., *What is Mathematics?,* New York, Oxford University Press, 1996.
8. Miron R., Brânzei D., *Fundamentele aritmeticii şi geometriei,* Bucureşti, Editura Academiei Române, 1983.
9. Miron R., *Geometrie elementară,* Bucureşti: EDP, 1968.
10. Polya G., *Cum rezolvăm o problemă,* Bucureşti, EDP, 1965.
11. Polya G., *Descoperirea în matematică,* Bucureşti, EDP, 1971.
12. Polya G., *Matematica şi raţionamentele plauzibile,* vol. I şi II, Bucureşti, Editura Ştiinţifică, 1962.
13. Ţiţeică Gh., *Probleme de geometrie,* Bucureşti, Editura tehnică, 1981.
14. Vlăsceanu L. (coord.), *Şcoala la răscruce – Schimbare şi continuitate în curriculumul învăţământului obligatoriu. Studiu de impact,* Iaşi, Editura Polirom, 2002.
15. *Избранные вопросы математики: 10 кл. Факультативный курс*/ А.М.Абрамов, Н.Я.Виленкин, Г.В.Дорофеев и др., Сост.: С.И.Щварцбурд. – Москва, 1980.
16. Ковалева Г. И., *Теория и практика обучения будущих учителей математики конструированию систем задач,* Волгоград, 2012.
17. Когаловский С.П., *Развивающее обучение математике как опережающее обучение*, Иваново, 2010.
18. Колягин Ю.М., *Задачи в обучении математике*, Москва, Просвещение, 1977.
19. Лупу И., Чобан-Пилецкая А., *Мотивация обучения математике,* Кишинэу, 2008.
20. Папышев А., *Теоретико-методологические основы обучения учащихся решению математических задач в контексте деятельностного подхода.* Автореферат диссертации на соискание степени доктора педагогических наук по специальности 13.00.02 Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования), Саранск, 2012.
21. Родионов М.А., Марина Е.В., *Развивающий потенциал математических задач и возможности его актуализации в учебном процессе*, Пенза, 2010.
22. Фридман Л.М., *Как научиться решать задачи: Книга для учащихся старших классов средней школы*, Москва, Просвещение, 1989.